Как я рассуждал. Бидон 6л равен по емкости двум 3литровых, тогда можно представить, что все льем в 3х литровые, чтобы найти остаток. (а там при желании можно любые ***2k*** 3-х литровых бидонов заменить на ***k*** 6 литровых бидонов)

В общем задача сводится к тому, чтобы найти минимальное $n\in\mathbb{N}, n\neq 3, n\neq 6$,чтобы не существовало таких $x, z\in\mathbb{N}$, что выполнялось равенство:

$3x+nz=2015$ **(1)**

Это одно из так называемых Диофантовых уравнений.Уравнения в котором неизвестные могут приннимать только целочисленные значения(у нас область поиска сужена до натуральных чисел (1, 2, 3, 4, ...)) Если ***n*** зафиксировать , т. е. Придать ему определенное значение, то такое уравнение можно решить(точнее я разобрался как решать уравнения такого вида, а если будет еще третье неизвестное ***n***, то ...). Например при ***n***=8 (1) примет вид

$3x+8z=2015$

Ладно поначалу был просто перебор.

2015/3=671 остаток 2.

Далее рассуждаем так. при n=1л и при n=2л остаток преспокойно можно разлить по 2м или соответственно в 1 бидон, наполнив их доверху.

n=3 уже как бы занято

Далее

n=4. при этом можно разлить «доверху», так как 2015/4=503 ост 3.

n=5 отбрасываем так как 2015 нацело делится на 5.

n=6 занято.

n=7 2015/7=286 ост 6, остаток кратный 3 и кратный 6 можно разлить «доверху».

n=8 2015/8= 251 ост 7 остаток не кратный 3. Может быть.

Есть ли $x, z\in\mathbb{N}$ такие что они являются корнями уравнения: $3x+8z=2015$?

Вот тут я его решал.

$3x+8z=2015$ (2)

Числа 3 и 8 взаимно простые (их наибольший общий делитель НОД равен 1), значит уравнение (2) имеет целочисленные решения. Значит надо их найти и проверить, есть ли среди них такие, что ***x*** и ***z*** одновременно больше 0.

Ищем. Для начала надо находим частное решение x_0, z_0 уравнения. (Т.е. надо найти хотя бы одну пару чисел, и тогда можно будет построить общее решение.)

NB Вкратце теория. Для уравнения вида

$ax+by=c$ где a, b, c целые числа. (3)

Если есть такая пара чисел x_0, y_0, что уравнение (3) превращается в верное равенство

$ax_0+by_0=c$, (4)

то общее решение находится в виде:

$$\begin{matrix} x=x_0-bt \\ y=y_o+at \end{matrix}$$, где t — целые числа $t=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ (5)

Т.е. Общее решение это набор чисел ***x,y***, определяемых правилами (4), (5).

Чтобы найти x_0, y_0, можно вначале решить уравнение:

$$a\,\widetilde{x}_0+b\,\widetilde{y}_0=1 \quad (6)$$

Если $\widetilde{x}_{0,}\,\widetilde{y}_0$ найдены, тогда ***x_0, y_0***, определятся так:

$$\begin{aligned} x_0&=c\cdot\widetilde{x}_0 \\ y_0&=c\cdot\widetilde{y}_0 \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение (6) можно в общем случае «победить» по такой схеме:

«Расписываем» больший коэффициент по алгоритму Евклида. Пусть это будет ***a*** (всегда можно переобозначить коэффициенты, переменные)

$$\begin{aligned} a&=q_0\cdot b+r_1 \\ b&=q_1\cdot r_1+r_2 \\ r_1&=q_2\cdot r_2+r_3 \\ &\ldots\ldots \\ r_{n-1}&=q_n\cdot r_n \end{aligned} \quad (8)$$

$r_1, \ldots, r_n$ - положительные остатки, убывающие с возрастанием номера. Расписываем до тех пор, пока не получим остаток равный 0. Из первого равенства следует, что общий делитель чисел *a* и *b* делит r_1 и общий делитель *b* и r_1 делит *a*, поэтому *НОД (a,b) = НОД (b,* r_1*) = НОД (*r_1*,* r_2*) = … = НОД (*r_n *-1,* r_n*)= = НОД (*r_n*, 0) =* r_n.

Обратимся к системе (8). Из первого равенства, выразив остаток r1 через a и b, получим

$r_1 = a – bq_0$. Продолжая этот процесс, мы можем выразить все остатки через a и b, получим $r_1 = a – bq_0$. Подставляя его во второе равенство, найдём $r_2 = b(1 + q_0q_1) – aq_1$. Продолжая этот процесс дальше, мы сможем выразить все остатки через a и b, в том числе и последний: r_n = Aa + Bb. В результате: если d – наибольший общий делитель натуральных чисел a и b, то найдутся такие целые числа A и B, что d = Aa + Bb. Заметим, что коэффициенты A и B имеют разные знаки; если НОД (a,b) = 1, то Aa + Bb = 1. Как найти числа A и B, видно из алгоритма Евклида.

Ну что ж, разбираемся с (2).

$8z+3x=2015$ (2)

Ищем частное решение.

$8z_0+3x_0=2015$ (9)

$8z_0+3x_0=1$ (10)

$az_0+bx_0=1$

Далее «расписываем» больший коэффициент по алгоритму Евклида.

$$\begin{aligned}&8=2\cdot 3+2\\&a=q_0\cdot b+r_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2=2\cdot 3+2\\&b=q_1\cdot r_1+r_2\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}&2=2\cdot 1+0\\&r_1=q_2\cdot r_2+r_3\end{aligned}$$

Выражаем последний ненулевой остаток (в нашем случае $\boldsymbol{r_2}$) через a и b. Из соотношений (11) последовательно, начиная с r_1 выражаем их через a и b. Получаем:

$$\begin{aligned}r_2&=b(1+q_0\cdot q_1)-a\cdot q_1\\1&=b(1+2\cdot 1)-a\cdot 1\end{aligned} \quad (12)$$

Далее соотносим выражения (12) и (10), и сравниваем числа при ***a*** и ***b***.

$$\begin{aligned}&8z_0+3x_0=1\\&-a\cdot 1+b(1+2\cdot 1)=1\\&8\cdot(-1)+3(1+2)=1\end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда следует $z_0=-1$, $x_0=3$. Это частное решение (10).

Тогда частное решение (2) будет.

$z_0=-1\cdot 2015=-2015$, $x_0=3\cdot 2015=6045$ Можно проверить, подставить в (2).

$8\cdot(-2015)+3\cdot 6045=-16120+18135=2015$ Выполняется.

Далее строим общее решение (2)

$$\begin{aligned}z&=z_0-bt\\x&=x_0+at\end{aligned} \quad t\in\mathbb{Z} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}z&=-2015-3t\\x&=6045+8t\end{aligned} \quad t\in\mathbb{Z} \quad (14а)$$

Нас интересуют такие пары ***x***, ***z***, в которых одновременно x>0 и z>0. Для поиска таких пар решаем неравенство

$$z = -2015 - 3t > 0$$

$$-3t > 2015$$

$$t < -\left(671 + \frac{2}{3}\right) \quad (15)$$

Поскольку t должно быть целым считаем ближайшим значением t, удовлетворяющим (15) t=-672 т.е.

$$t \leq -672 \quad (16)$$

Подставляем t=-672 в выражения для ***z*** и ***x*** (14a)

$$\begin{matrix} z = -2015 - 3 \cdot (-672) = -2015 + 2016 = 1 \\ x = 6045 + 8 \cdot (-672) = 6045 - 5376 = 669 \end{matrix} \quad (17)$$

Можно проверить, подставить (17) в (2).

$$8 \cdot 1 + 3 \cdot 669 = 2015$$

$$8 + 2007 = 2015$$

Да соотношения (17) являются решением (2). Это значит, что с 8-ми литровыми бидонами, можно разлить молоко, заполнив задействованные бидоны полностью.

n=8 отбрасываем.

n=9. Уравнение (1) приобретает вид:

$$9z + 3x = 2015 \quad (18)$$

Тут коэффициенты при переменных 9 и 3 имеют НОД, равный 3, но 2015 нацело на 3 не делится, следовательно уравнение (18) в целых числах не разрешимо. Итого:

Ответ: минимальное n=9.