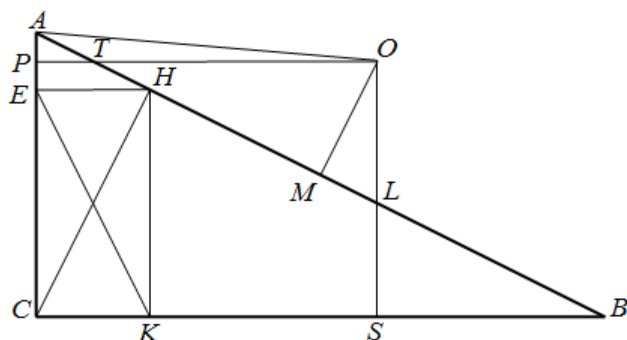


На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH . Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE .

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.



а) Обозначим $\angle B = \beta$. Сторона AC угла ACH перпендикулярна стороне BC угла B , а сторона CH угла ACH перпендикулярна стороне AB угла B ; $\angle ACH = \angle B = \beta$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. $\angle KEC = \angle ACH = \beta$, т.к. прямоугольные треугольники EKN и ECH равны по катету и гипотенузе (EH – общий

катет, $EK = CH$ как диагонали прямоугольника $EHKC$).

$\angle AEK = 180^\circ - \angle KEC = 180^\circ - \beta$. $\angle AEK + \angle B = (180^\circ - \beta) + \beta = 180^\circ$. Углы AEK и B – противоположные углы четырёхугольника $ABKE$, следовательно, около четырёхугольника $ABKE$ можно описать окружность, на которой и будут лежать точки A, B, K и E .

б) Найдём центр окружности, описанной около четырёхугольника $ABKE$. Для этого проведём перпендикуляры через середины сторон AE (точка P), KB (точка S) и AB (точка M) к этим сторонам. Эти перпендикуляры пересекутся в точке O (центре описанной окружности). OP пересекает AB в точке T , а OS пересекает AB в точке L . PT –

средняя линия треугольника AEN , поэтому $TH = \frac{1}{2}AN$, SL – средняя линия тре-

угольника KBH , поэтому $HL = \frac{1}{2}BH$, $TH + HL = \frac{1}{2}(AN + BH)$, но $TH + HL = TL$, а

$AN + BH = AB$, поэтому $TL = \frac{1}{2}AB$, и прямоугольный треугольник LTO подобен

треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$. Отсюда $OM = \frac{1}{2}CH = \frac{5}{2}$.

AO – радиус описанной около четырёхугольника $ABKE$ и гипотенуза прямоугольного треугольника AMO . По теореме Пифагора $AO^2 = AM^2 + OM^2 = 6^2 + 2,5^2$; $AO^2 = 42,25 \Rightarrow AO = 6,5$.