

б) Знайти екстремум функції корисності споживача $u = x_1^2 - x_2^2$ в області бюджетного обмеження споживача $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, де x_1, x_2 – попит на два різних види товарів відповідно.

исследовать на экстремум функцию u при данных условиях

$$u(x_1; x_2) = x_1^2 - x_2^2, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$u(x_1; x_2) = x_1^2 - x_2^2 \tag{1}$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \tag{2}$$

Предварительные соображения

$u(x_1; x_2) = x_1^2 - x_2^2$ задает гиперболический параболоид с вершиной в начале координат.

Неравенство $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ задает круг единичного радиуса с центром в начале координат на плоскости x_1x_2 . При этом граница тоже включена в рассматриваемую область.

Согласно одной из теорем Вейерштрасса, если функция непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то в этой области она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

При поиске минимумов (максимумов) поступают так.

- Находят «критические» точки (точки где 1-е частные производные обращаются в 0 или не существуют).
- Затем проверяют эти точки на предмет существования в них минимума (максимума).
- Затем исследуют поведение функции на границе области. Находят там минимум (максимум).
- Из найденных значений функции выбирают наименьшее (наибольшее).

РЕШЕНИЕ.

Находим критические точки. Для этого находим 1-е частные производные и приравниваем их к 0.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1} &= 2x_1 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= -2x_2\end{aligned}\tag{3}$$

Получаем «систему»

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases}\tag{4}$$

Из (4) получаем одну критическую точку $x_1=0, x_2=0$.

Поскольку исследуемая функция это задает поверхность типа гиперболического параболоида, то сразу можно сказать, что в начале координат ($x_1=0, x_2=0$) экстремума не будет.

Можно воспользоваться теоремой о достаточных условиях экстремума.

Пусть функция $f(x, y)$ в окрестности точки $M_0=(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков. При этом можно составить разность.

$$\Delta(M_0) = f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot f''_{y^2}(x_0, y_0) - f''_{xy}(x_0, y_0)^2$$

Тогда,

- если $\Delta(M_0) > 0$ функция имеет экстремум в M_0 . Причём максимум, когда $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ (или $f''_{y^2}(x_0, y_0) < 0$), и минимум при $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ (или $f''_{y^2}(x_0, y_0) > 0$)
- если $\Delta(M_0) < 0$, функция не имеет экстремума в M_0
- если $\Delta(M_0) = 0$, функция может иметь, а может и не иметь экстремума в M_0

$$\Delta(M_0) = f''_{x_1^2}(0, 0) \cdot f''_{x_2^2}(0, 0) - f''_{x_1 x_2}(0, 0)^2 = 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 = -4 < 0$$

Экстремума нет.

Теперь ищем максимум u на границе

$$\begin{aligned} u(x_1; x_2) &= x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Из функции и условия строим функцию Лагранжа

$$F(x, y) = u(x_1, x_2) + \lambda \phi(x_1, x_2) \quad (6)$$

$$F(x, y) = x_1^2 - x_2^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad (7)$$

Где λ числовой параметр, подбираемый из дополнительного условия.

Координаты точек подозрительных на экстремум должны удовлетворять системе уравнений получаемой с помощью функции Лагранжа.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \phi(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Подставляем в (8) выражения для функции Лагранжа (7), получаем следующий вид системы (8)

$$\begin{cases} 2x_1(\lambda + 1) = 0 \\ 2x_2(\lambda - 1) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Система из 3-х уравнений с 3-мя неизвестными. Решаем систему (9). Из 1-го уравнения системы (9) следует

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \text{ или} \\ \lambda + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Если $x_1 = 0$, то из 3-го уравнения (9) следует

$$\begin{aligned} x_2^2 &= 1 \\ x_2 &= \pm 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнения (11) и 2-го уравнения системы (9) следует:

$$\begin{aligned}\lambda - 1 &= 0 \\ \lambda &= 1\end{aligned}\tag{12}$$

Теперь рассматриваем случай, когда в 1-м уравнении системы (9) $\lambda + 1 = 0$. Тогда получаем:

$$\begin{aligned}\lambda &= -1 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= \pm 1\end{aligned}\tag{13}$$

Таким образом, получаем 4 точки. При $\lambda = 1$

$$\begin{aligned}A(x_1=0; x_2=1) \\ B(x_1=0; x_2=-1)\end{aligned}\tag{14}$$

При $\lambda = -1$

$$\begin{aligned}C(x_1=1; x_2=0) \\ D(x_1=-1; x_2=0)\end{aligned}\tag{15}$$

Точки А и В расположены в плоскости $x_1=0$. В этом сечении функция u представляет собой параболу

$$u = -x_2^2\tag{16}$$

Ветви которой направлены вниз. Соответственно в этих точках достигается минимум.

Точки С и D расположены в плоскости $x_2=0$. В этом сечении функция u представляет собой параболу

$$u = x_1^2\tag{17}$$

Ветви которой направлены вверх. Соответственно в точках С и D достигается максимум.

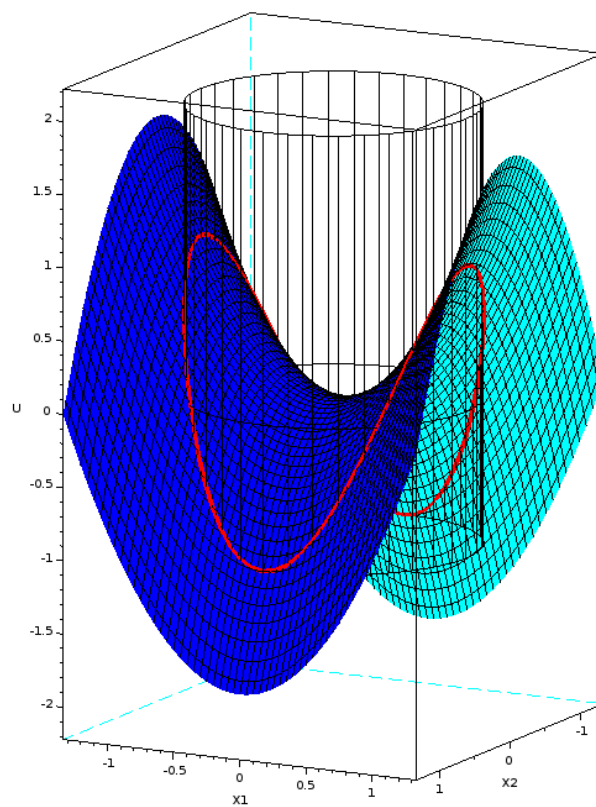
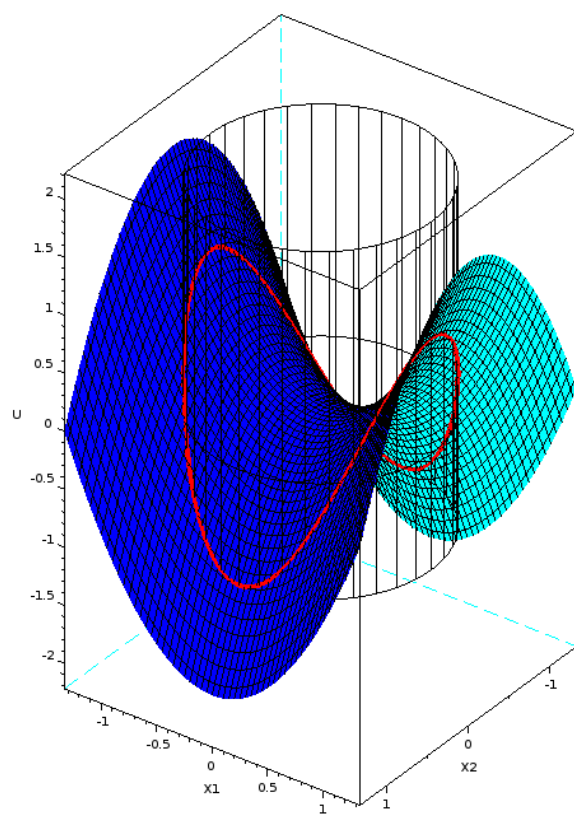
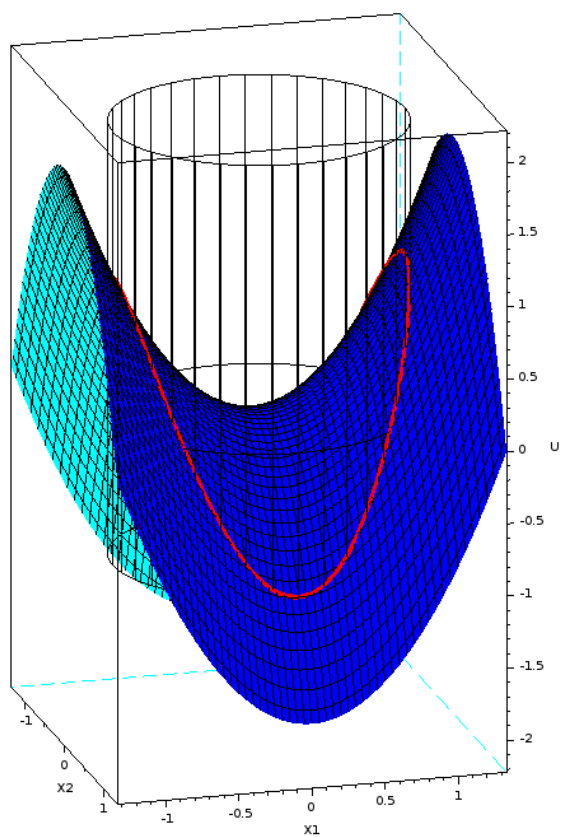


Рисунок 1: Кривая пересечения (Построена в Scilab по 42 расчетным точкам)



ОТВЕТ

Исследуемая функция, в заданной области будет иметь максимум $u=1$ в точках:

$$C(x_1=1; x_2=0)$$

$$D(x_1=-1; x_2=-0)$$