

Решить в целых числах уравнение

$$3^y = x^2 - 8x + 7$$

Решение. Разложим на множители правую часть уравнения: $x^2 - 8x + 7 = (x-1)(x-7)$. Так как левая часть делится только на степени 3, то $x-1 = 3^m$, $x-7 = 3^n$ или $1-x = 3^m$, $7-x = 3^n$ для некоторых целых неотрицательных m, n .

1. $x-1 = 3^m$, $x-7 = 3^n$, при этом понятно, что $m > n$. Тогда $6 = (x-1) - (x-7) = 3^m - 3^n = 3^n(3^{m-n} - 1)$. 6 делится только на 3^0 или 3^1 , поэтому

$$\begin{cases} n = 0 \\ 3^m - 1 = 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n = 1 \\ 3^{m-1} - 1 = 2 \end{cases}$$

Первая система неразрешима в целых числах, для второй $m = 2$. Тогда $x = 10$, $3^y = 27$, $y = 3$.

2. $1-x = 3^m$, $7-x = 3^n$, при этом $n > m$. Рассматривая аналогично первому случаю, находим $m = 1$, $n = 2$. Тогда $x = -2$, $y = 3$.

Ответ. $x = -2$, $y = 3$ или $x = 10$, $y = 3$.